Rachunek prawdopodobieństwa

Lista nr 5 *Dyskretne zmienne losowe*

1. Rzucamy kostką, zmienna losowa X przyjmuje wartość 0 jeśli liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3, 1 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, 2 gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Wyznaczyć rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

2. Przeznaczona do odbioru partia towaru zawiera jednakową liczbę sztuk I, II i III gatunku. Niech ω_1, ω_2, ω_3 oznaczają zdarzenia elementarne w doświadczeniu polegającym na wylosowaniu z tej partii towaru sztuki odpowiednio I, II, III gatunku. Zmienne losowe X, Y określamy w sposób następujący:

$$X(\omega_1) = 2, \qquad X(\omega_2) = 1, \qquad X(\omega_3) = 0, \qquad Y(\omega_1) = 0, \qquad Y(\omega_2) = 1, \qquad Y(\omega_3) = 2.$$

   Porównać rozkłady zmiennych losowych X, Y. Wyznaczyć ich dystrybuanty. Czy zmienne losowe X i Y są równe?

3. Z pęku n kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej X jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznaczyć rozkład X.

4. Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład i obliczyć wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej.

5. Dane są 4 urny i 3 kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Obliczyć rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej losowej.

6. Losujemy n - krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do N. X jest największą spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Obliczyć rozkład zmiennej losowej X.

7. Dany jest odcinek $[0, L]$ i punkt r należący do tego odcinka. Z odcinka losujemy dwa punkty x_1, x_2. Zmienna losowa X przyjmuje wartość 1, gdy punkt r znajduje się miedzy wylosowanymi punktami oraz 0 w przeciwnym wypadku. Podać rozkład i wartość oczekiwaną X.

8. Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1, 1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie liczby na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podać rozkład zmiennej losowej.

9. Niech $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\{\omega\}) = 1/4$ dla $\omega = 0, 1, 2, 3$. Definiujemy dwie zmienne losowe $X(\omega) = \sin(\frac{\pi\omega}{2})$ oraz $Y(\omega) = \cos(\frac{\pi\omega}{2})$. Znaleźć rozkłady i dystrybuanty zmiennych losowych X i Y. Obliczyć $P(X = Y)$.

10. Z talii 52 kart wyciągamy 6 i takiemu losowaniu przypisujemy liczbę pików. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.

11. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby sukcesów w schemacie Bernoulliego.

12. Jeśli X jest zmienną losową przyjmującą wartości całkowite nieujemne, to $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n)$.

13. Wykonujemy doświadczenia Bernoulliego aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech X oznacza liczbę wykonanych doświadczeń. Wyznaczyć rozkład i wartość średnią zmiennej losowej X.

14. Prawdopodobieństwo trafienia "szóstki" w Toto-Lotku wynosi $1/\binom{49}{6} \approx 7 \cdot 10^{-8}$. Załóżmy, że grający w Toto-Lotka wypełniają kupony całkowicie losowo i niezależnie od siebie oraz że w każdym tygodniu kuponów jest 10 milionów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w danym tygodniu wypadnie chociaż jedna "szóstka". Ile wynosi prawdopodobieństwo, że pojawią się co najmniej dwie "szóstki".

15. Na pewnym skrzyżowaniu, dochodzi średnio do dwóch wypadków miesięcznie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że
   a) zdarzy się dokładnie 6 wypadków w pierwszym półroczu
   b) od stycznia do czerwca, w każdym miesiącu zdaży się jeden wypadek.

16. Wyznaczyć w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że wśród 365 losowo wybranych osób 5 urodziło się 14 lub 15 grudnia.

17. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi $0,517$. Oszczacować prawdopodobieństwo, że wśród $10\,000$ noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewcząt.

18. Wydział Matematyki i Informatyki pragnąłby przyjąć na pierwszy rok nie więcej niż 130 studentów. Kandydatów jest 400, a szansa zdania testu wstępnego wynosi $0,3$. Oszczacować prawdopodobieństwo, że Wydział będzie miał problem z nadmiarem kandydatów.

19. Średnia liczba sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego jest równa np. Odchylenie liczby sukcesów od średniej nazwiemy typowym, jeżeli szansa większego odchylenia od średniej jest taka sama jak, jak mniejszego. Wyznaczyć wzór na odchylenie typowe za pomocą Twierdzenia Moivre'a-Laplace'a.